

Ministerul Educației și Cercetării

Olimpiada Națională de Matematică 2007
Etapă județeană și a Municipiului București
3 martie 2007
CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Se consideră numerele reale strict pozitive x, y, z cu proprietatea că $xy = \frac{z-x+1}{y} = \frac{z+1}{2}$. Să se arate că unul dintre numere este media aritmetică a celorlalte două.

Soluție și barem de corectare.

Avem $z = xy^2 + x - 1$ și $z = 2xy - 1$ 2 puncte

Rezultă $x(y^2 - 2y + 1) = x(y - 1)^2 = 0$, de unde $y = 1$, căci $x \neq 0$ 3 puncte

Atunci $xy = \frac{z+1}{2}$ devine $x = \frac{z+y}{2}$, adică x este media aritmetică a numerelor y și z 2 puncte

Subiectul 2. Se consideră un dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 2$ și $BC = \sqrt{3}$. punctul M aparține laturii AD astfel ca $MD = 2 \cdot AM$ și punctul N este mijlocul segmentului AB . Pe planul dreptunghiului se ridică perpendiculara MP astfel încât măsura unghiului planelor (MPC) și (NPC) să fie de 45° . Considerăm punctul Q pe segmentul MP astfel încât măsura unghiului planelor (MPC) și (QNC) să fie de 60° .

a) Să se arate că dreptele DN și CM sunt perpendiculare.

b) Să se arate că punctul Q este mijlocul segmentului MP .

Soluție și barem de corectare.

a) Deoarece $AN = 1$ și $DM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ obținem $\frac{AN}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{DM}{DC}$ deci $\angle MCD = \angle ADN$ și de aici $DN \perp CM$ 2 puncte

b) Conform punctului anterior, dreapta DN este perpendiculară pe planul (PMC) ; fie $T \in CM \cap DN$ și fie R, S proiecțiile lui T pe CQ , respectiv PC . Conform teoremei celor trei perpendiculare rezultă că $\angle TRN = 60^\circ$ și $\angle TSN = 45^\circ$ 2 puncte

Prin calcul găsim $CT = \sqrt{3}$, $RC = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ și $MC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Urmează $TN = 1$, de unde obținem $TR = \frac{1}{\sqrt{3}}$ și $TS = 1$ 1 punct

Din asemănările $\triangle CRT \sim \triangle CQM$ și $\triangle CTS \sim \triangle CMP$ rezultă $QM = \frac{RT \cdot MC}{RC} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ și $MP = \frac{ST \cdot MC}{SC} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, deci $MQ = QP$ 2 puncte

Subiectul 3. Opt numere naturale consecutive se împart în două mulțimi disjuncte cu câte 4 elemente. Să se arate că dacă suma pătratelor elementelor din prima mulțime este egală cu suma pătratelor elementelor din a doua mulțime atunci suma elementelor primei mulțimi este egală cu suma elementelor celei de-a doua.

Soluție și barem de corectare.

Fie $a, a + 1, a + 2, \dots, a + 7$ cele 8 numere. Suma pătratelor acestora este $8a^2 + 56a + 140$, prin urmare suma pătratelor elementelor din cele două mulțimi este $4a^2 + 28a + 70$ 1 punct

Fie X mulțimea ce conține elementul $a + 7$ și fie $a + i, a + j, a + k$ celelalte trei elemente ale sale. Atunci $3a^2 + 2a(i + j + k) + i^2 + j^2 + k^2 = 4a^2 + 28a + 70 - (a + 7)^2 = 3a^2 + 14a + 21$, deci $2a(i + j + k - 7) = 21 - (i^2 + j^2 + k^2)$.

..... 1 punct

Să observăm că problema revine la a arăta că $i + j + k = 7$ 1 punct

Să presupunem că $i + j + k \geq 8$. Atunci $i^2 + j^2 + k^2 \geq \frac{(i+j+k)^2}{3} \geq \frac{64}{3} > 21$, deci membrul drept al ultimei egalități este negativ, fals. 2 puncte

Să presupunem că $i + j + k \leq 6$. Cum $21 - (i^2 + j^2 + k^2)$ este par, $i^2 + j^2 + k^2$ este impar și deci $i + j + k$ este impar. Deducem că i, j, k sunt 0,1,2 sau 0,1,4 sau 0,2,3; în toate cazurile $21 - (i^2 + j^2 + k^2) > 0 > 2a(i + j + k - 7)$, contradicție. 2 puncte

Subiectul 4. Punctele unui cerc se colorează cu verde sau galben astfel încât orice triunghi echilateral înscris în cerc să aibă exact două vârfuri colorate în galben. Să se arate că există un pătrat înscris în cerc care are cel puțin trei vârfuri colorate în galben.

Soluție și barem de corectare. Fie $A_1 A_2 \dots A_{12}$ un dodecagon regulat înscris în cerc. 2 puncte

Triunghiurile $A_1 A_5 A_9, A_2 A_6 A_{10}, A_3 A_7 A_{11}$ și $A_4 A_8 A_{12}$ sunt echilaterale, deci 8 vârfuri din cele 12 sunt colorate în galben. 2 puncte

Considerăm pătratele $A_1 A_4 A_7 A_{10}, A_2 A_5 A_8 A_{11}$ și $A_3 A_6 A_9 A_{12}$. Din principiul cutiei rezultă că unul din cele 3 pătrate are cel puțin 3 vârfuri colorate în galben. 3 puncte